# લિબર્ટી પેપરસેટ

## ધોરણ 12 : ગણિત

## Full Solution

સમય : 3 કલાક

અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 7

## PART A

**1.** (D) **2.** (C) **3.** (D) **4.** (C) **5.** (A) **6.** (C) **7.** (B) **8.** (A) **9.** (C) **10.** (D) **11.** (A) **12.** (D) **13.** (D) **14.** (A) **15.** (B) **16.** (A) **17.** (B) **18.** (B) **19.** (A) **20.** (C) **21.** (B) **22.** (B) **23.** (D) **24.** (D) **25.** (A) **26.** (D) **27.** (B) **28.** (C) **29.** (C) **30.** (A) **31.** (B) **32.** (B) **33.** (D) **34.** (C) **35.** (D) **36.** (D) **37.** (A) **38.** (B) **39.** (D) **40.** (C) **41.** (B) **42.** (A) **43.** (C) **44.** (A) **45.** (C) **46.** (B) **47.** (B) **48.** (C) **49.** (A) **50.** (A)

## PART B

### વિભાગ-A

**1.**

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)$$

અહીં, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{4} < -x < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - x$$

**2.**

$$\sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\tan^{-1}\sqrt{3}\right)$$

$$\sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

હવે, $\tan^{-1}\frac{2}{3} = \theta$ લેતાં,

$$\therefore \tan\theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{4}{9}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{9}}$$

$$= \frac{12}{13}$$

$$= \sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\tan^{-1}\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{12}{13} + \cos\left(\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{12}{13} + \cos\frac{\pi}{3} \quad \left(\because \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{12}{13} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{24 + 13}{26}$$

$$= \frac{37}{26}$$

**3.**

$$x^y = e^{x-y}$$

$$\log x^y = \log e^{x-y}$$

$$\therefore y \log x = (x - y) \log e$$

$$\therefore y \log x = x - y$$

$$\therefore y \log x + y = x$$

$$\therefore y (\log x + 1) = x$$

$$\therefore y = \frac{x}{1 + \log x}$$

$x$ ની સાપેક્ષે વિકલન કરતાં,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+\log x}\right)$$

$$= \frac{(1+\log x)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(1+\log x)}{(1+\log x)^2}$$

$$= \frac{(1+\log x)(1) - x\cdot\left(0+\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2}$$

$$= \frac{1+\log x - 1}{(1+\log x)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

**4.**

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

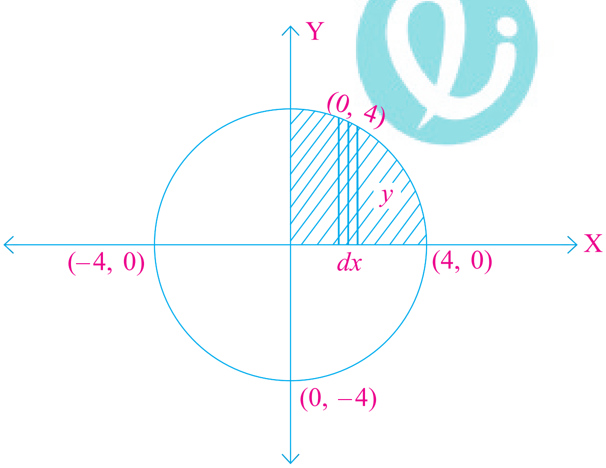
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2}}$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$\therefore \quad I = \log \left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2-3x+2}\right| + c$$

**5.**




$x^2 + y^2 = 16$

$\therefore \quad y^2 = 16 - x^2$

$\therefore \quad y = \sqrt{16-x^2}$

$$\rightarrow \quad I = \int_0^4 y\,dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{4^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{4^2-x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]_0^4$$

$$= 8\sin^{-1}(1) - 0$$

$$= 8\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 4\pi$$

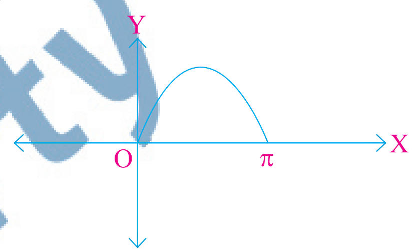
$\therefore$ આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ $= 4|I|$

$= 4(4\pi)$

$= 16\pi$ ચો. એકમ

**6.**

$y = \sin x$, $x = 0$ અને $x = \pi$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ A છે.




$$I = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= (-\cos x)_0^{\pi}$$

$$= -\cos\pi + \cos 0$$

$$= -(-1) + 1$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

$\therefore \quad A = |I|$

$= 2$ ચો. એકમ

**7.**

$$\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

→ બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$\therefore \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\therefore sin^{-1}(y) = -sin^{-1}(x) + c$

$\therefore sin^{-1}(x) + sin^{-1}(y) = c$

જે માંગેલ વ્યાપક ઉકેલ છે.

**8.**

A(1, 1, 2), B(2, 3, 5), C(1, 5, 5)

$\overrightarrow{AB} = (2, 3, 5) - (1, 1, 2)$

$= (1, 2, 3)$

$= \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = (1, 5, 5) - (2, 3, 5)$

$= (-1, 2, 0)$

$= -\hat{i} + 2\hat{j} + 0\hat{k}$

$\Delta ABC$નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$ ....... (1)

હવે, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= -6\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{36+9+16}$

$= \sqrt{61}$

પરિણામ (1) પરથી, $\Delta = \frac{\sqrt{61}}{2}$ ચો. એકમ

**9.**

$\overrightarrow{b_1} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

$\overrightarrow{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

ધારો કે, બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો $\alpha$ હોય તો,

$cos\ \alpha = \frac{|\overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_2}|}{|\overrightarrow{b_1}||\overrightarrow{b_2}|}$ ......... (1)

$\overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_2} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 3 + 4 + 12$

$= 19$

$|\overrightarrow{b_1}| = \sqrt{9+4+36}$

$= \sqrt{49}$

$= 7$

$|\overrightarrow{b_2}| = \sqrt{1+4+4}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

પરિણામ (1) પરથી,

$cos\ \alpha = \frac{|19|}{(7)(3)}$

$= \frac{19}{21}$

$\therefore \alpha = cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

આથી, બે રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો $cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$ છે.

**10.**

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}), \lambda \in R$

$\overrightarrow{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$;

$\overrightarrow{b_1} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

તથા $\vec{r} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$

$+ \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}); \mu \in R$

$\overrightarrow{a_2} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$;

$\overrightarrow{b_2} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

હવે, $\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= -9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$

$\neq \vec{0}$

રેખાઓ છેદક અથવા વિષમતલીય હોય

$\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

$|\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2}| = \sqrt{81+9+81}$

$= \sqrt{171}$

હવે, $(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}) \cdot (\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2})$

$= (3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (-9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k})$

$= -27 + 9 + 27$

$= 9$

$\neq 0$

$\therefore$ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

બે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર,

$$= \frac{|(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}) \cdot (\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2})|}{|\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2}|}$$

$= \frac{9}{\sqrt{171}}$

$= \frac{9}{3\sqrt{19}}$

$= \frac{3}{\sqrt{19}}$ એકમ

**11.**

પાસા પર મળતો પૂર્ણાંક 3નો ગુણિત હોય તો પાસાને ફરીથી ફેંકો અને પાસા પર બીજો અંક હોય તો સિક્કો ફેંકો. પાસા પર ઓછામાં ઓછો એક વખત પૂર્ણાંક 3 મળે તેમ આપેલ હોય, તો સિક્કા પર કાંટો મળે તે ઘટનાની શરતી સંભાવના શોધો.

પાસો

3, 6 — ફરી પાસો ઉછાળો → 1, 2, 3, 4, 5, 6

1, 2, 4, 5 — સિક્કો → H, T

S = {(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (1, H), (1, T), (2, H), (2, T), (4, H), (4, T), (5, H), (5, T)}

ઘટના A : પાસા પર ઓછામાં ઓછો 1 વાર 3 હોય,

A = {(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (6, 3)}

$\therefore \quad r = 7$

$\therefore \quad P(A) = \dfrac{7}{20}$

ઘટના B : સિક્કા પર કાંટો આવે

B = {(1, T), (2, T), (4, T), (5, T)}

$\therefore \quad r = 4$

$\therefore \quad P(B) = \dfrac{4}{20}$

$\therefore \quad A \cap B = \phi$

$\therefore \quad P(A \cap B) = 0$

$\therefore \quad P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

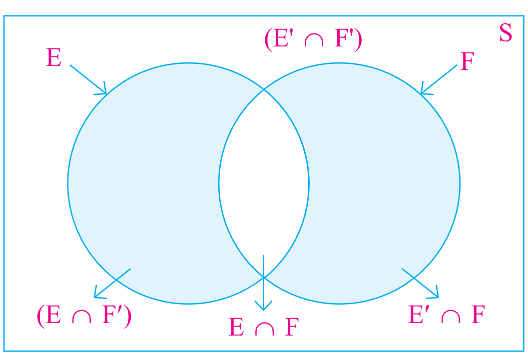
$= \dfrac{0}{\frac{7}{20}}$

$= 0$

**12.**

ઘટનાઓ E અને F નિરપેક્ષ હોવાથી આપણી પાસે,

$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$ .......... (1)




આકૃતિમાંની વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ કે,

$E \cap F$ અને $E \cap F'$ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે અને

વળી, $E = (E \cap F) \cup (E \cap F')$

$\therefore \quad P(E) = (E \cap F) + P(E \cap F')$

અથવા $P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$

$= P(E) - P(E)\,P(F)$ ((1)) પરથી)

$= P(E)\,(1 - P(F))$

$= P(E) \cdot P(F')$

તેથી, E અને F′ નિરપેક્ષ છે.

## વિભાગ-B

**13.**

અહીં $f : R \to R$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$

$x_1 = 2$ તથા $x_2 = 3$ લેતાં

$f(x_1) = 1;\ f(x_2) = 1$

$x_1 \neq x_2$ પરંતુ $f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore$ $f$ એ એક-એક વિધેય નથી

(આવા $x_1$ અને $x_2$ ની ભિન્ન હોય તેવી અસંખ્ય કિંમતો લઈ શકાય)

અહીં ચિહ્ન વિધેયનો વિસ્તાર = $\{1, 0, -1\} \neq$ સહપ્રદેશ

$\therefore$ $f$ એ વ્યાપ્ત વિધેય નથી.

**નોંધ :** અહીં $f : R \to R$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0\ ; & x = 0 \end{cases}$ પણ ચિહ્ન વિધેય છે.

**14.**

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ લેતાં,

ધારો કે, શ્રેણિક X એ $m \times n$ કક્ષાનો છે.

અહીં, A એ $2 \times 3$ કક્ષાનો અને

B એ $2 \times 3$ કક્ષાનો છે.

હવે, XA વ્યાખ્યાયિત છે જે B થાય છે.

$\therefore$ X ના સ્તંભની સંખ્યા = Aની હારની સંખ્યા

$\therefore \quad n = 2$

તથા XA ની કક્ષા = Bની કક્ષા

$m \times 3 = 2 \times 3$

$\therefore \quad m = 2$

આમ, X એ $2 \times 2$ કક્ષાનો શ્રેણિક લેવો પડે.

ધારો કે, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

હવે, XA = B

$$\therefore \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a+4b & 2a+5b & 3a+6b \\ c+4d & 2c+5d & 3c+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$\therefore \ a + 4b = -7$ ... (1)

$2a + 5b = -8$ ... (2)

$c + 4d = 2$ ... (3)

$2c + 5d = 4$ ... (4)

સમીકરણ (1) અને (2) ઉકેલતાં,

$$\begin{aligned} 2a + 8b &= -14 \\ 2a + 5b &= -8 \\ - \quad - \quad &\quad + \\ \hline 3b &= -6 \\ b &= -2 \end{aligned}$$

$b = -2$ સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$2a - 16 = -14$

$\therefore \ 2a = 2$

$\therefore \ a = 1$

સમીકરણ (3) અને (4) ઉકેલતાં,

$$\begin{aligned} 2c + 8d &= 4 \\ 2c + 5d &= 4 \\ - \quad - \quad &\quad - \\ \hline 3d &= 0 \\ \therefore \ d &= 0 \end{aligned}$$

$d = 0$ સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$2c + 0 = 4$

$\therefore c = 2$

આમ, $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$, $d = 0$

$$\therefore \ X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**15.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2 નો સહઅવયવ $A_{21}$ $= (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= (-1)\,[9 - 16]$

$= (-1)\,(-7)$

$= 7$

0 નો સહઅવયવ $A_{22}$ $= (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= (1)\,[15 - 8]$

$= 7$

1 નો સહઅવયવ $A_{23}$ $= (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-1)\,[10 - 3]$

$= (-1)\,(7)$

$= -7$

$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$= (2)(7) + (0)(7) + (1)(-7)$

$= 14 + 0 - 7$

$= 7$

$\Delta = 7$

**16.**

બંને બાજુ *log* લેતાં,

$y\log(\cos x) = x\log(\cos y)$

$$\therefore \ y \frac{d}{dx} \log(\cos x) + \log(\cos x) \frac{d}{dx} y = x \frac{d}{dx} \log(\cos y) + \log(\cos y) \frac{d}{dx} x$$

$$\therefore \ y \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x) + \log(\cos x) \frac{dy}{dx} = x \frac{1}{\cos y} (-\sin y) \frac{dy}{dx} + \log(\cos y)$$

$$\therefore \ -y\tan x + \log(\cos x) \frac{dy}{dx} = -x\tan y \frac{dy}{dx} + \log(\cos y)$$

$$\therefore \ \log(\cos x) \frac{dy}{dx} + x\tan y \frac{dy}{dx} = \log(\cos y) + y\tan x$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} [\log(\cos x) + x\tan y] = \log(\cos y) + y\tan x$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = \frac{y\tan x + \log(\cos y)}{x\tan y + \log(\cos x)}$$

**17.**

$f(x) = (x(x-2))^2$

$f(x) = (x(x-2))^2$

$= x^2(x-2)^2$

$= x^2(x^2 - 4x + 4)$

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$\therefore \ f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

$= 4x(x^2 - 3x + 2)$

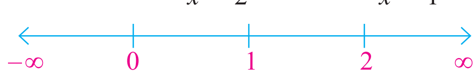
$= 4x(x-2)(x-1)$

→ અંતરાલ મેળવવા માટે,

$f'(x) = 0$

$\therefore \ 4x(x-2)(x-1) = 0$

$\therefore \ x = 0$ | $x - 2 = 0$, $x = 2$ | $x - 1 = 0$, $x = 1$




→ $\forall \ x \in (-\infty, 0) \Rightarrow x < 0, \ x - 2 < 0, \ x - 1 < 0$

$\Rightarrow x(x-2)(x-1) < 0$

$\Rightarrow 4x(x-2)(x-1) < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$

$\therefore$ $f$ એ $(-\infty, 0)$ અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$\rightarrow \ \forall\, x \in (0, 1) \quad \Rightarrow x > 0,\ x - 2 < 0,\ x - 1 < 0$

$\Rightarrow x(x - 2)(x - 1) > 0$

$\Rightarrow 4x(x - 2)(x - 1) > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

$\therefore$ $f$ એ (0, 1) અંતરાલમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$\rightarrow \ \forall\, x \in (1, 2) \quad \Rightarrow x > 0,\ x - 2 < 0,\ x - 1 > 0$

$\Rightarrow x(x - 1)(x - 2) < 0$

$\Rightarrow 4x(x - 1)(x - 2) < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$

$\therefore$ $f$ એ (1, 2) અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$\rightarrow \ \forall\, x \in (2, \infty) \quad \Rightarrow x > 0,\ x - 2 > 0,\ x - 1 > 0$

$\Rightarrow x(x - 1)(x - 2) > 0$

$\Rightarrow 4x(x - 1)(x - 2) > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0$

$\therefore$ $f$ એ (2, $\infty$) અંતરાલમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

**18.**

➪ અહીં, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ હોવાથી,

આપણી પાસે $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$

અથવા $\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

માટે $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-|\vec{a}|^2=-1$ ..... (1)

ફરીથી $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$

અથવા $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-|\vec{b}|^2=-16$ ..... (2)

આ જ પ્રમાણે $\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-4$ ..... (3)

(1), (2) અને (3) નો સરવાળો કરતાં

આપણી પાસે $2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c})=-21$

અથવા $2\mu = -21$, અર્થાત્ $\mu=\dfrac{-21}{2}$

**19.**

➪ $L_1 : \vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) + t(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

$\vec{a_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$;

તથા $\vec{b_1} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$L_2 : \vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + s(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$\vec{a_2} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$;

તથા $\vec{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

હવે, $\vec{b_1} \times \vec{b_2}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$

$\neq \vec{0}$

$\therefore$ રેખાઓ છેદક અથવા વિષમતલીય હોય

$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(2)^2+16+9}$

$= \sqrt{29}$

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 0\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

હવે, $(\vec{a_2} - \vec{a_1}) \cdot (\vec{b_1} \times \vec{b_2})$

$= (0\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k})$

$= 0 - 4 + 12$

$= 8 \neq 0$

રેખાઓ વિષમતલીય છે.

બે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર,

$$= \frac{|(\vec{a_2}-\vec{a_1})\cdot(\vec{b_1}\times\vec{b_2})|}{|\vec{b_1}\times\vec{b_2}|}$$

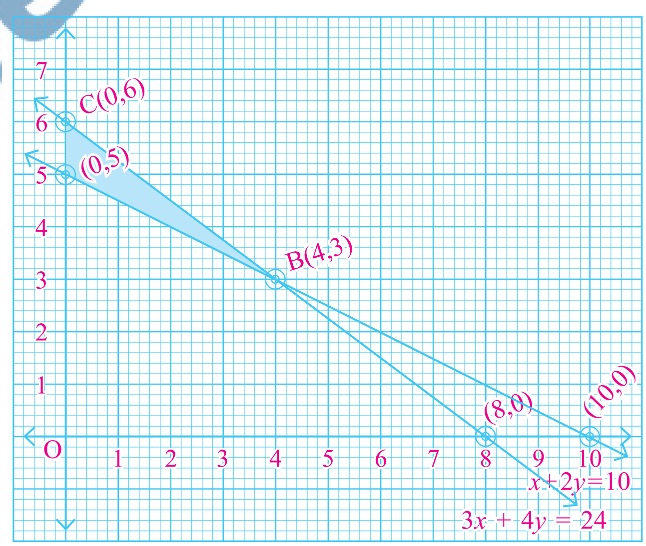
$= \dfrac{8}{\sqrt{29}}$ એકમ

**20.**

➪ મર્યાદા સંહતિ (2) થી (4) દ્વારા રચાતો શક્ય ઉકેલનો પ્રથમ પ્રદેશ ABC આકૃતિમાં રંગીન પ્રદેશ તરીકે દર્શાવેલ છે. તે સીમિત છે.

➪ શિરોબિંદુઓ A, B અને C ના યામ અનુક્રમે (0, 5), (4, 3) અને (0, 6) છે.

➪ હવે, આપણે આ દરેક બિંદુ આગળ Zની કિંમત મેળવીએ.




| શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ | $Z = 200x + 500y$ નું સંગત મૂલ્ય |
|---|---|
| (0, 5) | 2500 |
| (4, 3) | 2300 → ન્યૂનતમ |
| (0, 50) | 3000 |

આમ, બિંદુ (4, 3) આગળ Zનું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 2300 મળે છે.

**21.**

બે સમતોલ પાસાને ઉછાળવામાં આવે છે.

$\therefore$ નિદર્શાવકાશ

$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..... (6, 6)\}$

$\therefore n(S) = 36$

ઘટના A : પ્રથમ પાસા પર 6 મળે.

$\{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$\therefore \quad n(A) = 6$

ઘટના B : બીજા પાસા પર 2 મળે.

$\{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

$\therefore \quad n(B) = 6$

$\therefore A \cap B = \{(6, 2)\}$

$\therefore n(A \cap B) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

$\therefore P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

$\therefore$ ઘટના A અને ઘટના B એ નિરપેક્ષ ઘટના છે.

## વિભાગ-C

**22.**

$A^2 = A . A$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+0+1 & 0+0-1 & 2+0+0 \\ 4+2+3 & 0+1-3 & 2+3+0 \\ 2-2+0 & 0-1+0 & 1-3+0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

હવે, $A^2 - 5A + 6I$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 0 & -5 \\ -10 & -5 & -15 \\ -5 & +5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-10+6 & -1+0+0 & 2-5+0 \\ 9-10+0 & -2-5+6 & 5-15+0 \\ 0-5+0 & -1+5+0 & -2+0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

**23.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$
$= (1)(0 - 0)$
$= 0$

–1 નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$
$= (-1)(9 + 2)$
$= -11$

2 નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
$= (1)(0 - 0)$
$= 0$

3 નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$
$= (-1)(-3 - 0)$
$= 3$

0 નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$
$= 1(3 - 2)$
$= 1$

–2 નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
$= -1(0 + 1)$
$= -1$

1 નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$
$= 1(2 - 0)$
$= 2$

0 નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$
$= -1(-2 - 6)$
$= 8$

3 નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$
$= 1(0 + 3)$
$= 3$

$$adj\,A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A(adj\,A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+11+0 & 3-1-2 & 2-8+6 \\ 0+0+0 & 9+0+2 & 6+0-6 \\ 0+0+0 & 3+0-3 & 2+0+9 \end{bmatrix}$$

$$A(adj\,A) = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad .... (1)$$

$$(adj\,A)\,A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+9+2 & 0+0+0 & 0-6+6 \\ -11+3+8 & 11+0+0 & -22-2+24 \\ 0-3+3 & 0+0+0 & 0+2+9 \end{bmatrix}$$

$$(adj\,A)\,A = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad .... (2)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 1(0 - 0) + 1\,(9 + 2) + 2\,(0 - 0)$

$= 11$

$$|A|\,I_3 = 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \quad .... (3)$$

પરિણામ (1), (2), (3) પરથી,

$A(adjA) = (adjA)\,A = |A|\,I$

**24.**

$y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ નું

બંને બાજુ $x$ પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 500\,e^{7x}\,(7) + 600\,e^{-7x}\,(-7)$$

હવે, બંને બાજુ $x$ પ્રત્યે પુનઃ વિકલન કરતાં,

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 500\,e^{7x}\,(7)(7) + 600\,e^{-7x}\,(-7)(-7)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 49\,(500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x})$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 49y$$

**25.**

અહીં, $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$

$\therefore \quad f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$

$= 12x\,(x + 2)(x - 1)$

હવે, $f'(x) = 0$ લેતાં,

$x = 0,\ x = 1$ અને $x = -2$ મળે.

વળી, $f''(x) = 36x^2 + 24x - 24$

$= 12\,(3x^2 + 2x - 2)$

$$\therefore \begin{cases} f''(0) = -24 < 0 \\ f''(1) = 36 > 0 \\ f''(-2) = 72 > 0 \end{cases}$$

આથી, દ્વિતીય વિકલિત કસોટી પરથી,

વિધેય $f$ ને $x = 0$ આગળ સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય છે તથા સ્થાનીય મહત્તમ મૂલ્ય $f(0) = 12$ છે.

વળી, $x = 1$ તેમજ $x = -2$ આગળ વિધેય $f$ ને સ્થાનીય ન્યૂનતમ મૂલ્યો છે.

તે અનુક્રમે $f(1) = 7$ અને $f(-2) = -20$ છે.

**26.**

$$I = \int \frac{5x\,dx}{(x+1)(x^2+9)}$$

$$\frac{5x}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$$

$\therefore\ 5x = A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x + 1)$

→ હવે, $x = -1$ લેતાં,

$\therefore\ -5 = A(10) + (Bx + C)(0)$

$\therefore\ A = -\frac{1}{2}$

→ હવે, $x = 0$ લેતાં,

$\therefore\ 0 = 9A + B(0) + C(1)$

$\therefore\ 0 = \frac{-9}{2} + 0 + C$

$\therefore\ C = \frac{9}{2}$

→ હવે, $x = 1$ લેતાં,

$\therefore\ 5 = 10A + (B + C)(2)$

$\therefore\ 5 = 10A + 2B + 2C$

$\therefore\ 5 = \frac{-10}{2} + 2B + 2\left(\frac{9}{2}\right)$

$\therefore\ 5 = -5 + 2B + 9$

$\therefore\ 2B = 1$

$\therefore\ B = \frac{1}{2}$

$$I = \int \frac{5x\,dx}{(x+1)(x^2+9)}$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}}{x^2+9}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2(2)}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$I = \frac{-1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{\frac{d}{dx}(x^2+9)}{x^2+9}\,dx + \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x)^2+(3)^2}$$

$$= \frac{-1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log(x^2+9) + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

$$I = \frac{-1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log(x^2+9) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

**27.**

➪ $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 4x\operatorname{cosec} x$ ... (1)

પરિણામ (1) ને $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ સાથે સરખાવતાં

$P(x) = \cot x$

$Q(x) = 4x\operatorname{cosec} x$

→ સંકલ્યકારક અવયવ I.F. $= e^{\int P(x)\,dx}$

$= e^{\int \cot x\,dx}$

$= e^{\log|\sin x|}$

$= \sin x$

→ પરિણામ (1) ને $\sin x$ વડે ગુણતાં,

$\therefore \frac{dy}{dx}\sin x + y\cot x\sin x = 4x\operatorname{cosec} x\sin x$

$\therefore \frac{d}{dx}(y\sin x) = 4x$

$\therefore y\sin x = \int 4x\,dx$

$\therefore y\sin x = 2x^2 + c$ ... (1)

→ જો $x = \frac{\pi}{2}$ અને $y = 0$ હોય તો,

$\therefore 0 = 2\left[\frac{\pi^2}{4}\right] + c$

$\therefore c = -\frac{\pi^2}{2}$

→ $c$ ની કિંમત પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$\therefore y\sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$, જ્યાં, $\sin x \neq 0$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.